**Число «Пи» и способы его вычисления на компьютере**

**Автор: Орехова Екатерина,**

**ученица 11 класса, МКОУ Плесской средней общеобразовательной школы,**

**обучающаяся в объединении «Программирование» МКОУ ДОД ЦДЮТ**

**Руководитель: Юдин Андрей Борисович,**

**учитель математики МКОУ Плесской средней общеобразовательной школы,**

**педагог дополнительного образования**

**МКОУ ДОД ЦДЮТ**

Плес, 2014 г

**Содержание**

1. Введение

2. История числа «Пи»

3. Вычисление числа «Пи» на компьютере

4. Заключение

5. Список литературы

6. Приложение

**Введение**

Хотя число Пи является лишь одним из

бесконечного множества действительных чисел,

оно обратило внимание людей ещё в те времена,

когда они не умели письменно излагать свои знания.

Поль Валери.

Из курса школьной математики мы знаем, что число Пи (греческая буква **π**) – это математическая константа, выражающая отношение длины окружности к длине её диаметра. Число Пи иррационально и бесконечно. Существует масса формул, которые вычисляют эту константу, формулы эти были выведены как древними учеными, так и современными математиками.

Однако, если мы посмотрим на все формулы, которые известны на сегодняшний день, мы поймем, что высчитывать вручную число Пи очень трудно, и это занимает большой отрезок времени – порой даже и несколько лет. На помощь к нам приходит компьютер– на нем любые расчеты сокращаются по времени в десятки, а то и в тысячи раз, а точность расчетов гораздо больше, чем когда мы считаем вручную.

С помощью различных программ число Пи можно найти с точностью до тысячных, а то и более, знаков после запятой. Вы спросите, зачем, нам столько знаков пи, ведь известно, что для расчетов достаточно знать, что число Пи равно 3,14. Ответ прост – это очень интересно. Помимо того, иногда, знание лишь двух знаков после запятой, бывает недостаточно. Какое бы сочетание цифр мы бы ни выдумали – оно непременно встретится в знаках числа Пи, то есть можно ожидать появление любой наперед заданной последовательности цифр. Например, комбинация 01234567891 в числе пи встречается 7 раз. Также в числе пи встречается комбинация 27182818284 (это цифры числа е).Не правда ли, удивительно? Да что ходить далеко: даже в первой тысяче есть неожиданности – пять девяток подряд. Есть гипотезы, предполагающие, что в числе Пи скрыта любая информация, которая когда-либо была или будет доступна людям. Это значит, что мы должны продолжать наши опыты с Пи.

Мне стало интересно, с какой точностью смогу вычислить число Пи я сама. Но, как было сказано выше, считать число Пи на бумаге было бы очень затруднительно. Поэтому следующей моей задачей стало составить компьютерные программы для нахождения числа Пи.

**Цель работы:** выяснить, каким способом можно составить алгоритмы для нахождения числа Пи с помощью компьютера и узнать, какой способ помог мне более точно вычислить число Пи.

**Задачи работы:**

1. Ознакомиться с историей числа Пи
2. Найти необходимые формулы для вычисления числа Пи
3. Преобразовать найденные формулы в алгоритмы в системе программирования PascalABC
4. Узнать, какой способ вычисления наиболее точный

**История числа «Пи»**

"Письменная история числа  начинается с египетского папируса, датируемого примерно 2000 годом до нашей эры, но оно было известно еще древним людям. Число  обратило на себя внимание людей ещё в те времена, когда они не умели письменно излагать ни своих знаний, ни своих переживаний, ни своих воспоминаний. С тех пор как первые натуральные числа 1,2,3,4,… стали неразлучными спутниками человеческой мысли, помогая оценивать количества предметов либо их длины, площади или объёмы, люди познакомились с числом . Тогда оно ещё не обозначалось одной из букв греческого алфавита и его роль играло число 3. Нетрудно понять, почему числу  уделяли так много внимания. Выражая величину отношения между длиной окружности и её диаметром, оно появилось во всех расчётах связанных с площадью круга или длиной окружности". Но уже в глубокой древности математики довольно быстро и не без удивления обнаружили, что число 3 не совсем точно выражает то, что теперь известно как число пи. Безусловно, к такому выводу могли прийти только после того, как к ряду натуральных чисел добавились дробные или рациональные числа. Так египтяне получили результат: Формула В дальнейшем Архимед, используя метод верхних и нижних приближений, получает следующие границы числа Пи. Индусы в V-VI веках пользовались числом Формула, китайцы - числом Формула

"Обозначение числа  происходит от греческого слова Греческое слово ("окружность"). Впервые это обозначение использовал в 1706 году английский математик У. Джонс, но общепринятым оно стало после того, как его (начиная с 1736 года) стал систематически употреблять Леонард Эйлер". В конце 18 века И. Ламберт и А. Лежандр установили, что  иррациональное число, а в 1882 году Ф. Лидерман доказал, что оно трансцендентное, т.е. не может удовлетворять никакому алгебраическому уравнению с целыми коэффициентами.

На протяжении всего существования числа , вплоть до наших дней, велась своеобразная "погоня" за десятичными [знаками числа p.](http://e-pi.narod.ru/pi_zn.htm) Леонардо Фибоначи около 1220 года определил три первых точных десятичных знаков числа . В 16 веке Андриан Антонис определил 6 таких знаков. Франсуа Виет (подобно Архимеду), вычисляя периметры вписанного и описанного 322216-угольников, получил 9 точных десятичных знаков. Андриан Ван Ромен таким же способом получил 15 десятичных знаков, вычисляя периметры 1073741824-угольников. Лудольф Ван Кёлен, вычисляя периметры 32512254720-угольников, получил 20 точных десятичных знаков. Авраам Шарп получил 72 точных десятичных знаков числа . В 1844 году З. Дазе вычисляет 200 знаков после запятой числа , в 1847 году Т. Клаузен получает 248 знаков, в1853 Рихтер вычисляет 330 знаков, в том же 1853 году 440 знаков получает З. Дазе и в этом же году У. Шенкс получает 513 знаков. "С появлением ЭВМ количество верных знаков десятичных знаков резко возрастает:

1949 год - 2037 десятичных знаков (Джон фон Нейман, ENIAC), 1958 год - 10000 десятичных знаков (Ф. Женюи, IBM-704), 1961 год - 100000 десятичных знаков (Д. Шенкс, IBM-7090), 1973 год - 10000000 десятичных знаков (Ж. Гийу, М. Буйе, CDC-7600), 1986 год - 29360000 десятичных знаков (Д. Бейли, Cray-2), 1987 год - 134217000 десятичных знаков (Я. Канада, NEC SX2), 1989 год - 1011196691 десятичных знаков (Д. Гудновски и Г. Гудновски, Cray-2+IBM-3040)"

При вычислении верных десятичных знаков числа  пользовались различными способами, некоторые, как и Архимед вычисляли периметры вписанных и описанных n-угольников, но позднее стали прибегать к помощи рядов.

Так Лейбниц вычислял с помощью ряда:

Формула

Шарп применил ряд:

Формула

Л. Эйлер с помощью ряда:

Формула

З. Дазе использовал ряд.

Джон Валлис (1616-1703) нашёл бесконечное произведение, с помощью которого можно вычислить число пи:

Формула

Конечно, понятно, что такое вычисление имеет только спортивный интерес, как рекорд, потому, что в приложениях нет никакой необходимости знать Пи с такой точностью. Для практических потребностей достаточно знать, что **π**=3,14159.  
Рассмотрите внимательно его первую тысячу знаков, ведь над алгоритмом для его нахождения размышляли мыслители древнего Мира и Средневековья, Нового и настоящего времени:

Пи=3,1415926535 8979323846 2643383279 5028841971 6939937510 5820974944 5923078164 0628620899 8628034825 3421170679 8214808651 3282306647 0938446095 5058223172 5359408128 4811174502 8410270193 8521105559 6446229489 5493038196 4428810975 6659334461 2847564823 3786783165 2712019091 4564856692 3460348610 4543266482 1339360726 0249141273 7245870066 061558817 4881520920 9628292540 9171536436 7892590360 0113305305 48820466521384146951 9415116094 3305727036 5759591953 0921861173 8193261179 3105118548 0744623799 6274956735 1885752724 8912279381 8301194912 9833673362 4406566430 8602139494 6395224737 1907021798 6094370277 0539217176 2931767523 8467481846 7669405132 0005681271 4526356082 77857713427577896091736371787214684409012249534301465495853710507922796892589235 4201995611 2129021960 8640344181 5981362977 4771309960 5187072113 4999999837 2978049951 05973173281609631859 5024459455 3469083026 4252230825 3344685035 2619311881 7101000313 7838752886 5875332083 8142061717 7669147303 5982534904 28755468731159562863 8823537875 9375195778 1857780532 1712268066 1300192787…

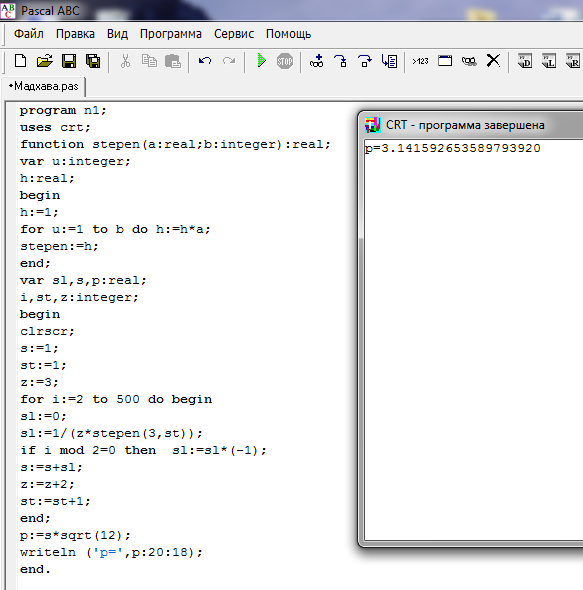
А какие замечательные возможности для соревнований даёт число Пи!Так например:  
1995 — японец ХирюкиГото сумел назвать по памяти 42 195 знаков после запятой.  
2004 — еще один представитель Страны восходящего солнца, 59-летний АкираХарагучи, поднял эту планку до 54-тысячных.  
2005 — все тот же неугомонный АкираХарагучи запомнил число Пи с точностью до 83 431 цифры после запятой.  
2005 — китаец ЧаоЛю чуть-чуть не дотянул до рекорда своего восточного соседа: 67 890 знаков уместились в голове Лю. 

**Вычисление числа «Пи» на компьютере**

1. Способ по формуле Мадхавы.

В 1400-х годах [Мадхава из Сангамаграма](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D0%B0%D0%B4%D1%85%D0%B0%D0%B2%D0%B0_%D0%B8%D0%B7_%D0%A1%D0%B0%D0%BD%D0%B3%D0%B0%D0%BC%D0%B0%D0%B3%D1%80%D0%B0%D0%BC%D0%B0&action=edit&redlink=1) вывел ряд, для нахождения числа Пи: \pi = \sqrt{12} \, \left(1-\frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \cdots\right)

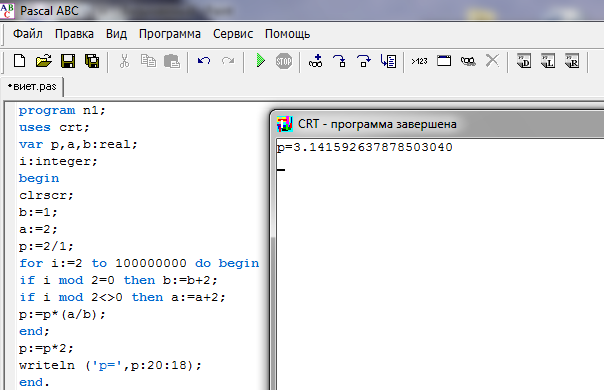
Он смог вычислить \pi как 3,14159265359, верно определив 11 цифр в записи числа. Составим алгоритм вычисление в программе PascalABC.

С помощью формулы Мадхавы мы вычислили, что после запятой совпадает 15 знаков.

1. После Мадхавы, в 1655 году, английский математик Джон Валлис нашел еще один способ для вычисления числа Пи:

\frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdots = \frac{\pi}{2}

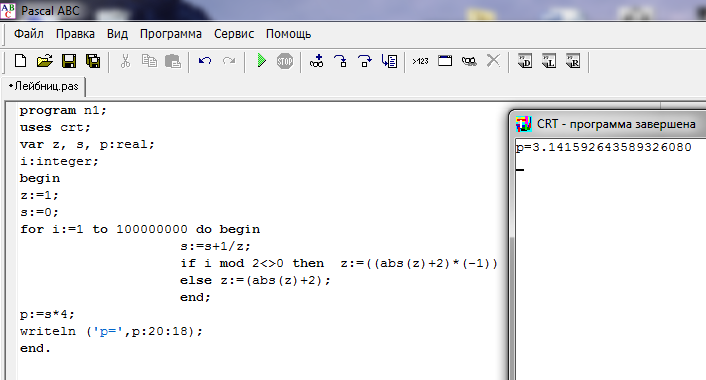
Данный способ помог нам верно определить 7 знаков после запятой.



1. В 1673-1674 году немецкий философ и математик Готфрид Вильгельм Лейбниц предложил следующий способ нахождения числа Пи:

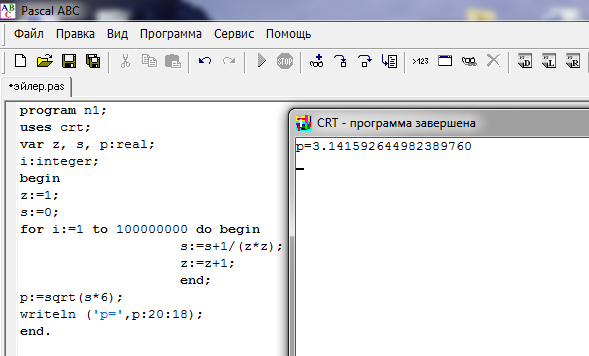
\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \cdots = \frac{\pi}{4}

Способ Лейбница довольно-таки точный, и рассчитать число Пи можно с весьма большой точностью. Вычислить с помощью программы PascalABC мы смогли 11 знаков после запятой. Однако, чем точнее полученное число, тем дольше длится процесс вычисления – у меня на это ушло 4 минуты, а для компьютера – это большой отрезок времени.



1. В 1735 году была установлена связь между [простыми числами](http://ru.wikipedia.org/wiki/%D0%9F%D1%80%D0%BE%D1%81%D1%82%D0%BE%D0%B5_%D1%87%D0%B8%D1%81%D0%BB%D0%BE) и Пи, когда Леонард Эйлер, швейцарский, немецкий и российский математик и механик, решил знаменитую [Базельскую проблему](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%91%D0%B0%D0%B7%D0%B5%D0%BB%D1%8C%D1%81%D0%BA%D0%B0%D1%8F_%D0%BF%D1%80%D0%BE%D0%B1%D0%BB%D0%B5%D0%BC%D0%B0&action=edit&redlink=1) — проблему нахождения точного значения, то он смог вывести следующую формулу:

\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots= \frac{\pi^2}{6}

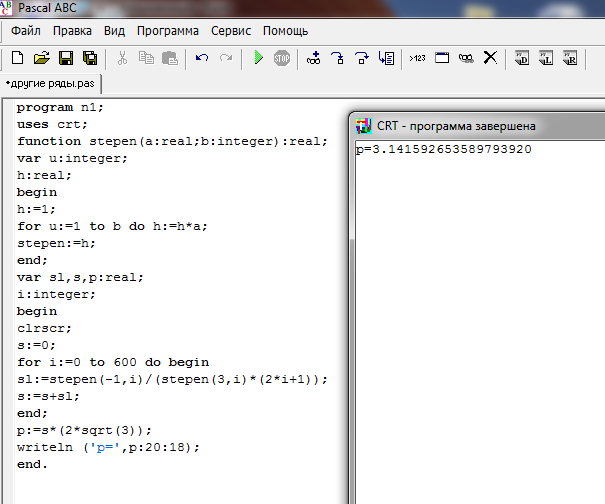


Способ Эйлера так же занимает время – у меня ушла 1 минута 15 секунд на правильное вычисление 8 знаков после запятой.

1. Нахождение числа Пи с помощью рядов:

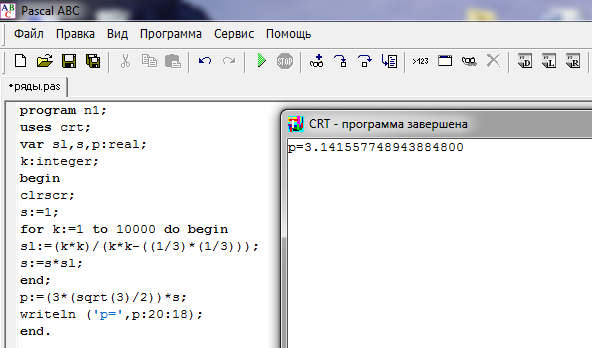
 \pi=2 \sqrt{3} \sum \limits_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{\, 3^k \, (2k+1)}

Благодаря данному ряду, мы смогли вычислить 7 знаков у числа Пи после запятой.



\pi=3\cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \prod \limits_{k=1}^{\infty}\frac{k^2}{k^2-\left (\frac{1}{3}\right )^2}

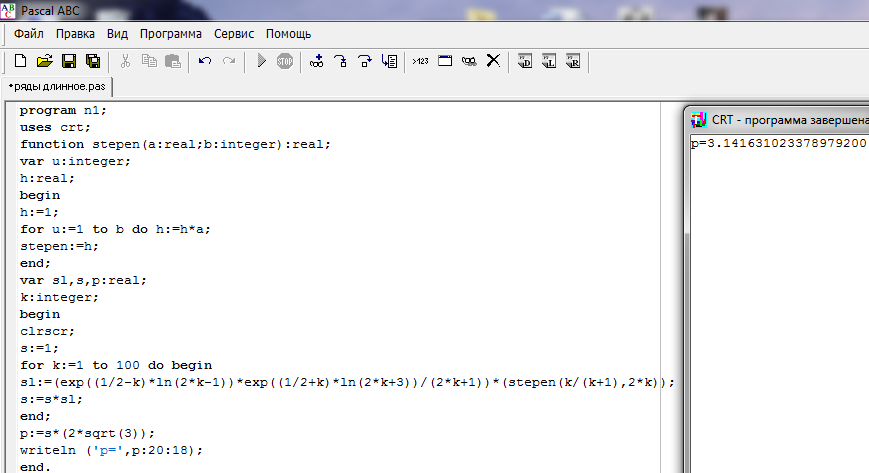
А данный ряд помог нам найти 4 верных знака после запятой.



5.3

\pi= 2\sqrt{3}\prod \limits_{k=1}^{\infty}\frac{\left ( 2k-1 \right )^{\frac 12 -k} \left ( 2k+3 \right )^{k+\frac 12}}{2k+1}\left (\frac{k}{k+1} \right )^{2k}

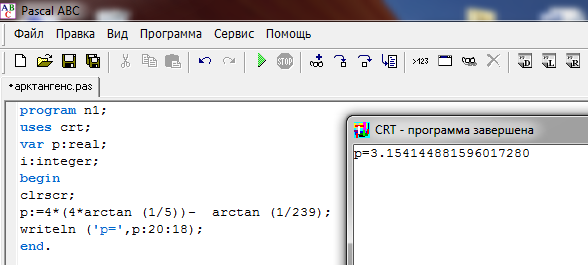
Этот способ весьма громоздкий в плане написания алгоритма, и результат он выдает ровно 3 верных знака после запятой. Но было весьма интересно попробовать запрограммировать его, и у меня это получилось.



1. В Новое время для вычисления Пи используются аналитические методы, основанные на тождествах. Перечисленные выше формулы малопригодны для вычислительных целей, поскольку либо используют медленно сходящиеся ряды, либо требуют сложной операции извлечения квадратного корня. Первую эффективную формулу нашёл в 1706 году [Джон Мэчин](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%9C%D1%8D%D1%87%D0%B8%D0%BD,_%D0%94%D0%B6%D0%BE%D0%BD&action=edit&redlink=1):

\frac{\pi}{4} = 4\,\mathrm{arctg}\frac{1}{5} - \mathrm{arctg}\frac{1}{239}

Данный способ весьма прост в плане написания, но результат дает небольшой – всего 1 верный знак после запятой.



1. В 1975 году [Ричард Брент](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%A0%D0%B8%D1%87%D0%B0%D1%80%D0%B4_%D0%91%D1%80%D0%B5%D0%BD%D1%82&action=edit&redlink=1) и [Юджин Саламин](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%AE%D0%B4%D0%B6%D0%B8%D0%BD_%D0%A1%D0%B0%D0%BB%D0%B0%D0%BC%D0%B8%D0%BD_(%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B5%D0%BC%D0%B0%D1%82%D0%B8%D0%BA)&action=edit&redlink=1) независимо друг от друга открыли [алгоритм Брента — Саламина](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9B%D0%B5%D0%B6%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B0&action=edit&redlink=1), который, используя лишь арифметику, на каждом шагу удваивает количество известных знаков. Алгоритм состоит из установки начальных значений

a_0 = 1 \quad \quad \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt 2} \quad \quad \quad t_0 = \frac{1}{4} \quad \quad \quad p_0 = 1

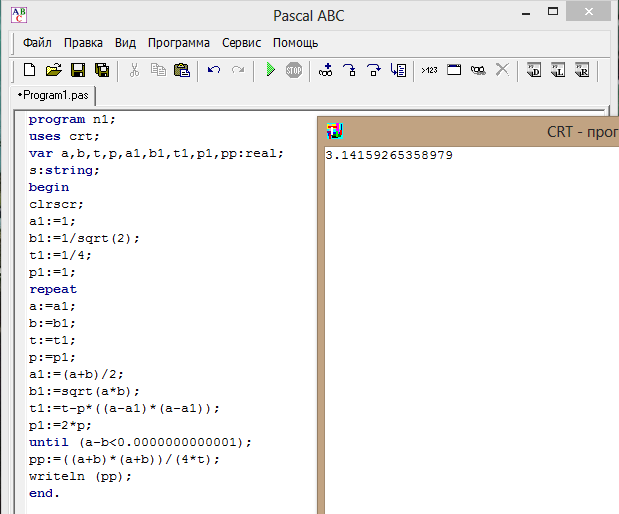
и итераций:

a_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2} \quad \quad \quad b_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}

t_{n+1} = t_n - p_n (a_n-a_{n+1})^2 \quad \quad \quad p_{n+1} = 2 p_n

пока *an* и *bn* не станут достаточно близки. Тогда оценка \pi даётся формулой

\pi \approx \frac{(a_n + b_n)^2}{4 t_n}.



Данный способ помогает верно определить 14 знаков после запятой.

**Заключение**

Проанализировав решенные мною задачи, я выяснила, что наиболее точными способами нахождения числа Пи являются:

1. Ряд Мадхавы
2. Формула Лейбница
3. [Алгоритм Брента — Саламина](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9B%D0%B5%D0%B6%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B0&action=edit&redlink=1)

Благодаря данной работе, я открыла для себя много нового о числе Пи и его истории; смогла найти более точный способ нахождения данного числа и составить алгоритмы для вычисления его на компьютере; получила новые знания о том, как работать в программе PascalABC.

Мог бы кто-нибудь сегодня удалить число Пи из мира дел человеческих?  
  
Число Пи присутствует в чертежах и вычислениях, выполняемых электронными машинами при подготовке и проведении полетов в космос; оно предоставляет необходимое количество десятичных знаков всякий раз, когда они нужны инженерам, рассчитывающим цилиндрические, сферические или конические части машин; физикам и астрономам, когда они проводят приближенные вычисления по формулам, в которых среди фундаментальных постоянных появляется и Пи, как, например, в формуле для периода колебания маятника, и в тысячах и тысячах других случаев. Куда бы мы ни обратили свой взор, мы видим проворное и трудолюбивое число Пи: оно заключено и в самом простом колесике, и в самой сложной автоматической машине.

В настоящее время с числом Пи связано труднообозримое множество формул, математических и физических фактов. Их количество продолжает стремительно расти. Всё это говорит о возрастающем интересе к важнейшей математической константе, изучение которой насчитывает уже более двадцати двух веков.

**Список литературы**

1. Бохан К.А. и др. Курс математического анализа т. II. - М.: Просвещение 1972.

2. Кымпан Ф. История числа p. - М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

3. Райк А.Е. Очерки по истории математики в древности. - Саранск, 1987.

4. Болтянский В. Экспонента. // Квант, 1984 №3.

5. Звонкин А. Что такое p. // Квант, 1978 №11.

6. Калейдоскоп Число p. // Квант, 1996 №6.

**Приложение**

1. **Ряд Мадхавы из Сангамаграма**

*program n1;*

*uses crt;*

*function stepen(a:real;b:integer):real;*

*var u:integer;*

*h:real;*

*begin*

*h:=1;*

*for u:=1 to b do h:=h\*a;*

*stepen:=h;*

*end;*

*var sl,s,p:real;*

*i,st,z:integer;*

*begin*

*clrscr;*

*s:=1;*

*st:=1;*

*z:=3;*

*for i:=2 to 500 do begin*

*sl:=0;*

*sl:=1/(z\*stepen(3,st));*

*if i mod 2=0 then sl:=sl\*(-1);*

*s:=s+sl;*

*z:=z+2;*

*st:=st+1;*

*end;*

*p:=s\*sqrt(12);*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

1. **Формула Джона Валлиса**

*program n1;*

*uses crt;*

*var p,a,b:real;*

*i:integer;*

*begin*

*clrscr;*

*b:=1;*

*a:=2;*

*p:=2/1;*

*for i:=2 to 100000000 do begin*

*if i mod 2=0 then b:=b+2;*

*if i mod 2<>0 then a:=a+2;*

*p:=p\*(a/b);*

*end;*

*p:=p\*2;*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

1. **Формула Вильгельма Лейбница**

*program n1;*

*uses crt;*

*var z, s, p:real;*

*i:integer;*

*begin*

*z:=1;*

*s:=0;*

*for i:=1 to 100000000 do begin*

*s:=s+1/z;*

*if i mod 2<>0 then z:=((abs(z)+2)\*(-1))*

*else z:=(abs(z)+2);*

*end;*

*p:=s\*4;*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

1. **Формула Леонарда Эйлера**

*program n1;*

*uses crt;*

*var z, s, p:real;*

*i:integer;*

*begin*

*z:=1;*

*s:=0;*

*for i:=1 to 100000000 do begin*

*s:=s+1/(z\*z);*

*z:=z+1;*

*end;*

*p:=sqrt(s\*6);*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

1. **Нахождения числа Пи с помощью рядов**

*program n1;*

*uses crt;*

*function stepen(a:real;b:integer):real;*

*var u:integer;*

*h:real;*

*begin*

*h:=1;*

*for u:=1 to b do h:=h\*a;*

*stepen:=h;*

*end;*

*var sl,s,p:real;*

*i:integer;*

*begin*

*clrscr;*

*s:=0;*

*for i:=0 to 600 do begin*

*sl:=stepen(-1,i)/(stepen(3,i)\*(2\*i+1));*

*s:=s+sl;*

*end;*

*p:=s\*(2\*sqrt(3));*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*



*program n1;*

*uses crt;*

*var sl,s,p:real;*

*k:integer;*

*begin*

*clrscr;*

*s:=1;*

*for k:=1 to 10000 do begin*

*sl:=(k\*k)/(k\*k-((1/3)\*(1/3)));*

*s:=s\*sl;*

*end;*

*p:=(3\*(sqrt(3)/2))\*s;*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

*program n1;*

*uses crt;*

*function stepen(a:real;b:integer):real;*

*var u:integer;*

*h:real;*

*begin*

*h:=1;*

*for u:=1 to b do h:=h\*a;*

*stepen:=h;*

*end;*

*var sl,s,p:real;*

*k:integer;*

*begin*

*clrscr;*

*s:=1;*

*for k:=1 to 100 do begin*

*sl:=(exp((1/2-k)\*ln(2\*k-1))\*exp((1/2+k)\*ln(2\*k+3))/(2\*k+1))\*(stepen(k/(k+1),2\*k));*

*s:=s\*sl;*

*end;*

*p:=s\*(2\*sqrt(3));*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

1. **Формула Джона Мэчина**

*program n1;*

*uses crt;*

*var p:real;*

*i:integer;*

*begin*

*clrscr;*

*p:=4\*(4\*arctan (1/5))- arctan (1/239);*

*writeln ('p=',p:20:18);*

*end.*

1. [**Алгоритм Брента — Саламина**](http://ru.wikipedia.org/w/index.php?title=%D0%90%D0%BB%D0%B3%D0%BE%D1%80%D0%B8%D1%82%D0%BC_%D0%93%D0%B0%D1%83%D1%81%D1%81%D0%B0_%E2%80%94_%D0%9B%D0%B5%D0%B6%D0%B0%D0%BD%D0%B4%D1%80%D0%B0&action=edit&redlink=1)

*program n1;*

*uses crt;*

*var a,b,t,p,a1,b1,t1,p1,pp:real;*

*s:string;*

*begin*

*clrscr;*

*a1:=1;*

*b1:=1/sqrt(2);*

*t1:=1/4;*

*p1:=1;*

*repeat*

*a:=a1;*

*b:=b1;*

*t:=t1;*

*p:=p1;*

*a1:=(a+b)/2;*

*b1:=sqrt(a\*b);*

*t1:=t-p\*((a-a1)\*(a-a1));*

*p1:=2\*p;*

*until (a-b<0.0000000000001);*

*pp:=((a+b)\*(a+b))/(4\*t);*

*writeln (pp);*

*end.*