

О заносе колесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колёс

А. В. ВЛАХОВА, И. В. НОВОЖИЛОВ

*Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова*

УДК 531.8

Ключевые слова: занос автомобиля, приближённая математическая модель, блокировка, пробуксовка.

Аннотация

Построены математические модели двухколесного экипажа при «блокировке» и «пробуксовке» одного из колёс. Показано, что при определённом сочетании параметров движения потеря сцепления колеса с дорогой приводит к заносу экипажа.

Abstract

A. V. Vlahova, I. V. Novozhilov, On skidding of a wheeled vehicle when one of the wheels blocks or slips, Fundamentalnaya i prikladnaya matematika, vol. 11 (2005), no. 7, pp. 11–20.

Two-wheel vehicle models for the case when one of the wheels blocks or slips are suggested. Some combinations of motion parameters are shown to lead to the skidding of the vehicle.

Рассматривается двухколёсный экипаж с передне-задним расположением колёс, движущийся по горизонтальной шероховатой поверхности. Конструкция экипажа считается абсолютно жёсткой, переднее колесо фиксировано в плоскости продольной симметрии экипажа, боковых наклонов нет. Последнее допущение оправданно для общепринятой в литературе «велосипедной» модели автомобиля [4, 9] либо для велосипеда или мотоцикла в пренебрежении эффектами, связанными с наклонами корпуса.

Уравнения движения экипажа с несущественными переобозначениями систем координат и переменных возьмём из [7]. Они слагаются из уравнений изменения количества движения и кинетического момента экипажа относительно центра масс C в проекциях на оси трёхгранника $Cxyz$ и уравнений вращения колёс относительно их осей. Ось x трёхгранника $Cxyz$ лежит в плоскости продольной симметрии и направлена вперёд по ходу движения, ось z вертикальна (рис. 1).

Фундаментальная и прикладная математика, 2005, том 11, № 7, с. 11–20.

© 2005 *Центр новых информационных технологий МГУ,
Издательский дом «Открытые системы»*

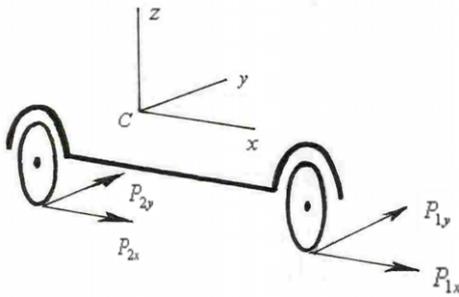


Рис. 1

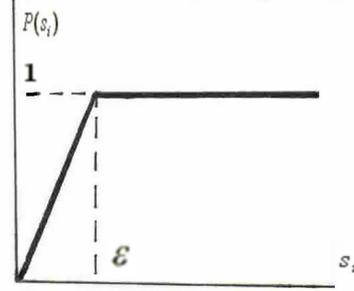


Рис. 2

$$\begin{aligned}
 M \left(\frac{dV_x}{dT} - \Omega_z V_y \right) &= P_{1x} + P_{2x} + F_x, \\
 M \left(\frac{dV_y}{dT} + \Omega_z V_x \right) &= P_{1y} + P_{2y} + F_y, \\
 N_1 + N_2 - Mg &= 0, \quad -AN_1 + BN_2 - (P_{1x} + P_{2x})H = 0, \\
 I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= P_{1y}A - P_{2y}B + M_z, \\
 I \frac{d\Omega_1}{dT} &= -P_{1x}R + L_1, \quad I \frac{d\Omega_2}{dT} = -P_{2x}R + L_2.
 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь T — размерное время; M , I_z — масса и момент инерции экипажа; I , R — осевой момент инерции и радиус колёс; A , B — передний и задний вынос колёс относительно центра масс, H — высота центра масс над опорной поверхностью; V_x , V_y — проекции вектора его скорости, Ω_z — проекция угловой скорости корпуса; Ω_1 , Ω_2 — угловые скорости колёс (при выбранном направлении движения принимается $V_x(0), \Omega_1(0), \Omega_2(0) > 0$); F_x , F_y , M_z — проекции возмущающих сил и моментов (для простоты считается, что продольные силы приводятся к главному вектору F_x в центре масс); L_1 , L_2 — моменты управления колёсами; P_{1x} , P_{1y} , P_{2x} , P_{2y} и N_1 , N_2 — проекции касательных и нормальных составляющих контактных сил взаимодействия первого (переднего) и второго (заднего) колёс с опорной поверхностью. Из (1) следует, что

$$N_1 = \frac{MgB - (P_{1x} + P_{2x})H}{A + B}, \quad N_2 = \frac{MgA + (P_{1x} + P_{2x})H}{A + B}. \tag{2}$$

Как и в [5–7], примем для касательных составляющих сил зависимости

$$P_{ix} = -\kappa N_i \frac{s_{ix}}{s_i} p(s_i), \quad P_{iy} = -\kappa N_i \frac{s_{iy}}{s_i} p(s_i), \quad i = 1, 2. \tag{3}$$

Здесь κ — коэффициент кулонова трения скольжения,

$$s_{ix} = \frac{U_{ix}}{\Omega_i R}, \quad s_{iy} = \frac{U_{iy}}{\Omega_i R}, \quad s_i = \sqrt{s_{ix}^2 + s_{iy}^2}, \quad i = 1, 2, - \tag{4}$$

составляющие векторов «псевдоскольжения» и их модули для точек контакта колёс;

$$\begin{aligned} U_{ix} &= V_x - \Omega_i R, \quad i = 1, 2, \\ U_{1y} &= V_y + \Omega_z A, \quad U_{2y} = V_y - \Omega_z B - \end{aligned} \quad (5)$$

составляющие скоростей проскальзывания точек контакта колёс относительно опорной поверхности. Для функции $p(s_i)$ из (3) примем кусочно-линейную аппроксимацию, график которой приведён на рис. 2. Для автомобильных колёс ширина линейной зоны $-\varepsilon \approx 0, 1$ [6, 7]. Если во время движения i -го колеса $s_i < \varepsilon$, то говорят, что это колесо не теряет сцепления с дорогой, если $s_i > \varepsilon$ — теряет. Если при этом $s_{ix} = (V_x - \Omega_i R)/\Omega_i R > 0$, то колесо блокируется, если $s_{ix} < 0$ — пробуксовывает.

Будем полагать далее, что отношение массы m колеса к массе M экипажа мало: $\mu = m/M \sim 10^{-1} \div 10^{-2}$.

Рассмотрим сначала движение экипажа под действием скачкообразного изменения момента торможения $L_2 < 0$, величина которого превосходит предельное значение момента контактной силы: $|L_2| > \varkappa N_2 R$. Тогда за конечное время, существенно меньшее характерного времени изменения скорости центра масс, угловая скорость заднего колеса обратится в нуль — колесо блокируется. Будем, далее, изучать движение экипажа после завершения процесса блокировки. Математическая модель этого движения получается из (1)–(5) при $\Omega_2 \equiv 0$. Из последнего уравнения (1) может быть найдено значение момента сил кулонова трения на тормозных колодках, реализующего это движение: $L_2 = P_{2x} R$.касательные составляющие контактных сил заднего колеса обращаются в силы кулонова трения скольжения и могут быть получены из (3)–(5) предельным переходом $\Omega_2 \rightarrow 0$:

$$\begin{aligned} P_{2x} &= -\varkappa N_2 \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + (V_y - \Omega_z B)^2}}, \\ P_{2y} &= -\varkappa N_2 \frac{V_y - \Omega_z B}{\sqrt{V_x^2 + (V_y - \Omega_z B)^2}}. \end{aligned} \quad (6)$$

Будем предполагать, что величина момента L_1 не приводит к блокировке переднего колеса, так что аргумент s_1 из (3) остаётся в линейной зоне $s_1 < \varepsilon$ характеристики $p(s_1)$.

Построим приближённую математическую модель рассматриваемого движения, учитывающую малость отношения масс $\mu = m/M \ll 1$ и малость величины $s_1 < \varepsilon \ll 1$ [5].

Приведём уравнения движения к нормализованной, безразмерной форме, содержащей малые параметры. Как и в [3, 5], предварительно перейдём от исходного набора фазовых переменных

$$\{V_x, V_y, \Omega_z, \Omega_1, \Omega_2 \equiv 0\}$$

к набору

$$\{V_x, \Omega_z, U_{1x}, U_{1y}, \Omega_2 \equiv 0\},$$

содержащему «быстрые» переменные U_{1x} , U_{1y} , которые входят в уравнения (3) с «большим» коэффициентом $\varkappa N_1/\varepsilon$. Проделав при помощи (5) указанную замену, получим

$$\begin{aligned}
M \frac{dV_x}{dT} &= P_{1x} + P_{2x} + F_x + M\Omega_z(U_{1y} - \Omega_z A), \\
I_z \frac{d\Omega_z}{dT} &= P_{1y}A - P_{2y}B + M_z, \\
M \frac{dU_{1y}}{dT} &= P_{1y} + P_{2y} + F_y - M\Omega_z V_x + \frac{MA}{I_z}(P_{1y}A - P_{2y}B + M_z), \\
\frac{I}{R} \frac{dU_{1x}}{dT} &= P_{1x}R - L_1 + \frac{I}{RM}(P_{1x} + P_{2x} + F_x + M\Omega_z(U_{1y} - \Omega_z A)), \quad (7) \\
P_{1x} &= -\frac{\varkappa N_1}{\varepsilon} \frac{U_{1x}}{(V_x - U_{1x})}, \quad P_{1y} = -\frac{\varkappa N_1}{\varepsilon} \frac{U_{1y}}{(V_x - U_{1x})}, \\
P_{2x} &= -\varkappa N_2 \frac{V_x}{\sqrt{V_x^2 + (U_{1y} - \Omega_z(A+B))^2}}, \\
P_{2y} &= -\varkappa N_2 \frac{U_{1y} - \Omega_z(A+B)}{\sqrt{V_x^2 + (U_{1y} - \Omega_z(A+B))^2}}.
\end{aligned}$$

Выражения (2) здесь не приводятся, поскольку замена их не затрагивает. Перейдём в (2), (7) к безразмерным величинам

$$\begin{aligned}
t &= \frac{T}{T_*}, \quad v_x = \frac{V_x}{V_{x*}}, \quad u_{1x} = \frac{U_{1x}}{U_{1x*}}, \quad u_{1y} = \frac{U_{1y}}{U_{1y*}}, \quad \omega_z = \frac{\Omega_z}{\Omega_{z*}}, \\
p_{1x} &= \frac{P_{1x}}{P_*}, \quad p_{1y} = \frac{P_{1y}}{P_*}, \dots, \quad n_1 = \frac{N_1}{N_*}, \dots, \quad (8) \\
f_x &= \frac{F_x}{F_*}, \dots, \quad m_z = \frac{M_z}{M_{z*}}, \quad l_1 = \frac{L_1}{L_*}, \dots,
\end{aligned}$$

где T_*, \dots, L_* — характерные значения соответствующих величин для рассматриваемого класса движения. Примем $N_* = Mg$. Тогда для $\varkappa \sim 1$ будет $P_* = Mg$. Будем считать возмущающие силы величинами порядка контактных сил: $F_* = P_* = Mg$. Положим $M_{z*} = P_*(A+B)$, $L_* = P_*R$. Оценивая время, за которое под действием сил порядка Mg скорость изменяется на величину порядка характерной скорости V_* , примем $T_* = V_*/g$. При $s_1 < \varepsilon$ из (4) следует $U_* = \varepsilon\Omega_{1*}R$. Тогда из (5) получим $V_{x*} = \Omega_{1*}R$. Будем полагать, что при заносе составляющие скорости V_x, V_y — величины одного порядка. Тогда из (5) для $|V_x|, |V_y| \sim V_*$, $|U_{1y}| \sim \varepsilon V_*$ вытекает оценка $V_* = \Omega_{z*}(A+B)$. Считая инерционные силы в (7) соразмерными активным силам, примем $M\Omega_{z*}V_* = Mg$.

Подставим (8) в (7), (2), поделим полученные уравнения соответственно на $Mg, Mg(A+B), Mg, MgR$. Нормализованным аналогом системы (7), (2) будет

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= p_{1x} + p_{2x} + f_x + \varepsilon\omega_z u_{1y} - \omega_z^2 a, \\
\varrho_z^2 \frac{d\omega_z}{dt} &= p_{1y} a - p_{2y} b + m_z, \\
\varepsilon \frac{du_{1y}}{dt} &= p_{1y} + p_{2y} + f_y - \omega_z v_x + \frac{a}{\varrho_z^2} (p_{1y} a - p_{2y} b + m_z), \\
\varepsilon \mu \varrho^2 \frac{du_{1x}}{dt} &= p_{1x} - l_1 + \mu \varrho^2 (p_{1x} + p_{2x} + f_x + \varepsilon\omega_z u_{1y} - \omega_z^2 a), \\
p_{1x} &= -\varkappa n_1 \frac{u_{1x}}{v_x - \varepsilon u_{1x}}, \quad p_{1y} = -\varkappa n_1 \frac{u_{1y}}{v_x - \varepsilon u_{1x}}, \\
p_{2x} &= -\varkappa n_2 \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + (\varepsilon u_{1y} - \omega_z)^2}}, \quad p_{2y} = -\varkappa n_2 \frac{\varepsilon u_{1y} - \omega_z}{\sqrt{v_x^2 + (\varepsilon u_{1y} - \omega_z)^2}}, \\
n_1 &= b - (p_{1x} + p_{2x})h, \quad n_2 = a + (p_{1x} + p_{2x})h.
\end{aligned} \tag{9}$$

Здесь

$$\begin{aligned}
\mu &= \frac{m}{M}, \quad \varrho_z^2 = \left(\frac{r_z}{A+B} \right)^2, \quad \varrho^2 = \left(\frac{r}{R} \right)^2, \\
a &= \frac{A}{A+B}, \quad b = \frac{B}{A+B}, \quad h = \frac{H}{A+B},
\end{aligned}$$

r_z, r — радиусы инерции экипажа и колеса.

Будем рассматривать (9) как сингулярно возмущённую по А. Н. Тихонову систему с иерархической структурой малых параметров: $\varepsilon\mu \ll \varepsilon \sim \mu \ll 1$. Построим двукратно вырожденную систему, полагая в (9) равными нулю сначала члены порядка $\varepsilon\mu$, а затем ε и μ [2, 8]:

$$\begin{aligned}
\frac{dv_x}{dt} &= p_{1x} + p_{2x} + f_x - \omega_z^2 a, \\
\varrho_z^2 \frac{d\omega_z}{dt} &= p_{1y} a - p_{2y} b + m_z, \\
0 &= p_{1y} + p_{2y} + f_y - \omega_z v_x + \frac{a}{\varrho_z^2} (p_{1y} a - p_{2y} b + m_z), \\
0 &= p_{1x} - l_1 \\
p_{1x} &= -\varkappa n_1 \frac{u_{1x}}{v_x}, \quad p_{1y} = -\varkappa n_1 \frac{u_{1y}}{v_x}, \\
p_{2x} &= -\varkappa n_2 \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2}}, \quad p_{2y} = -\varkappa n_2 \frac{-\omega_z}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2}}, \\
n_1 &= b - (p_{1x} + p_{2x})h, \quad n_2 = a + (p_{1x} + p_{2x})h.
\end{aligned} \tag{10}$$

Уравнениями (10) описываются медленные составляющие движения, развивающиеся в характерном масштабе времени T_* . Погрешность приближённой модели (10) по отношению к исходной системе (9) — величина порядка $O(\varepsilon + \mu)$ вне пограничного слоя, оцениваемого величиной $O(-\varepsilon \ln(\varepsilon + \mu))$ [2]. Корректность проведённого двукратного вырождения при $v_x > 0, n_1, n_2 > 0$ устанавливается по [2, 8] без труда.

Исследуем приближённую модель (10). Исключив p_{1x} , p_{1y} , запишем её в виде

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= l_1 + f_x - \omega_z^2 a - \varkappa n_2 \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2}}, \\ (a^2 + \varrho_z^2) \frac{d\omega_z}{dt} &= -a f_y + m_z + \omega_z v_x a - \varkappa n_2 \frac{\omega_z}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2}}, \\ n_2 &= (a + l_1 h) \frac{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2}}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2} + \varkappa h v_x}.\end{aligned}\quad (11)$$

Системой (11) описывается продольное движение центра масс экипажа и его вращение вокруг точки контакта переднего колеса, не потерявшего сцепления с дорогой.

Пусть переднее колесо катится свободно ($l_1 = 0$), внешних возмущений нет ($f_x, f_y, m_z = 0$). В качестве начальных условий возьмём $v_x(0) > 0$, $\omega_z(0) = 0$. Тогда (11) имеет частное решение

$$v_x^0(t) = v_x(0) - \varkappa n_2^0 t, \quad \omega_z^0(t) \equiv 0, \quad n_2^0 = \frac{a}{1 + \varkappa h}.\quad (12)$$

Соотношения (12) описывают прямолинейное, равнозамедленное движение при торможении экипажа постоянной силой кулонова трения на заблокированном заднем колесе.

Рассмотрим движение для произвольных начальных условий. При $l_1, f_x, f_y, m_z = 0$ и любых $v_x > 0$, ω_z справедливо неравенство $0 < n_2 < 1$. Тогда $n_1, n_2 > 0$, т. е. движение происходит без отрыва обоих колёс от дороги. Исключив в (11) величину n_2 , получим

$$\begin{aligned}\frac{dv_x}{dt} &= -\varkappa a \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2} + \varkappa h v_x} - \omega_z^2 a, \\ (a^2 + \varrho_z^2) \frac{d\omega_z}{dt} &= -\varkappa a \frac{\omega_z}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2} + \varkappa h v_x} + \omega_z v_x a.\end{aligned}\quad (13)$$

Из первого уравнения видно, что при $v_x > 0$ и любых ω_z будет $dv_x/dt < 0$, т. е. продольная скорость монотонно убывает во всё время движения. Из второго уравнения следует, что угловое ускорение может менять знак.

На рис. 3 качественно изображён фазовый портрет системы (13). Траектории симметричны относительно оси v_x . Пунктиром изображены изоклины

$$\omega_z^2 = \frac{\varkappa^2 (1 - h v_x^2)^2}{v_x^2} - v_x^2,$$

соответствующие $d\omega_z/dt = 0$. Справа от этих изоклин угловая скорость по величине возрастает, что можно трактовать как занос экипажа.

Полученные результаты почти без изменения можно использовать в задаче о разгоне с пробуксовкой заднего колеса. В последнем уравнении системы (1) тогда следует изменить знак тормозного момента $L_2 < 0$ на противоположный — разгонный $L_2 > 0$ — и задать его величину превосходящей предельное

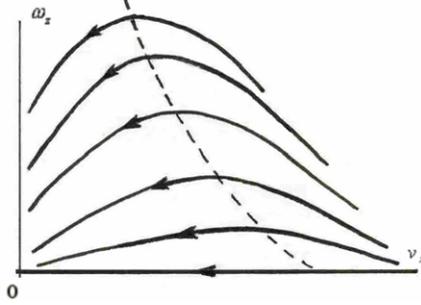


Рис. 3

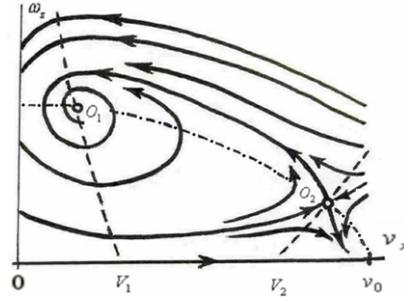


Рис. 4

значение момента контактной силы. Это приведёт к быстрому разгону колеса с проскальзыванием, пробуксовкой, до угловой скорости $\Omega_2^0 = \text{const}$, определяемой характеристиками двигателя. Так же, как и ранее, будем проводить исследование после завершения этого малоинерционного процесса.

В рассматриваемом случае из (5) следует $U_{2x} = V_x - \Omega_2^0 R < 0$, что изменит на противоположный знак перед выражением контактной силы P_{2x} в (2) и (7). Все остальные выкладки повторяют проведённые выше. Уравнение, соответствующее (12), будет описывать разгон аппарата до стационарной скорости $v_x = v_0$, где $v_0 = \Omega_2^0 R / V_*$,

$$v_x^0(t) = v_x(0) + \varkappa n_2^0 t, \quad \omega_z^0(t) \equiv 0, \quad n_2^0 = \frac{a}{1 - \varkappa h}. \quad (14)$$

Аналогом выражения n_2 из системы (11) при $l_1, f_x, f_y, m_z = 0$ будет

$$n_2 = a \frac{\sqrt{(v_x - v_0)^2 + \omega_z^2}}{\sqrt{(v_x - v_0)^2 + \omega_z^2 + \varkappa h(v_x - v_0)}}.$$

Отсюда можно получить условие

$$1 - a - \varkappa h > 0, \quad (15)$$

обеспечивающее выполнение требования $0 < n_2 < 1$ безотрывности движения обоих колёс.

Аналогом системы (13) будет

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\varkappa a \frac{v_x - v_0}{\sqrt{(v_x - v_0)^2 + \omega_z^2 + \varkappa h(v_x - v_0)}} - \omega_z^2 a, \\ (a^2 + \varrho_z^2) \frac{d\omega_z}{dt} &= -\varkappa a \frac{\omega_z}{\sqrt{(v_x - v_0)^2 + \omega_z^2 + \varkappa h(v_x - v_0)}} + \omega_z v_x a. \end{aligned} \quad (16)$$

Обсудим возможность возникновения заноса в этом случае. Фазовые траектории системы (16) симметричны относительно оси v_x . На рис. 4 пунктирными линиями изображены изоклины

$$\omega_z^2 = \frac{\varkappa^2(1 + hv_x(v_0 - v_x))^2}{v_x^2} - (v_0 - v_x)^2, \quad (17)$$

соответствующие $d\omega_z/dt = 0$, штрихпунктирными линиями — изоклины

$$(v_0 - v_x)^2 = \frac{\omega_z^6}{\varkappa^2(1 + h\omega_z^2)^2 - \omega_z^4},$$

соответствующие $dv_x/dt = 0$.

Заметим, что случай

$$v_0^2 \geq \frac{4\varkappa}{1 - \varkappa h}, \quad (18)$$

когда кривая (17) имеет два пересечения с осью v_x в точках

$$V_1 = \left(\frac{v_0}{2} - \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{\varkappa}{1 - \varkappa h}}, 0 \right), \quad V_2 = \left(\frac{v_0}{2} + \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{\varkappa}{1 - \varkappa h}}, 0 \right), \quad (19)$$

является опасным с точки зрения возникновения заноса. Действительно, здесь, независимо от величины начальной угловой скорости ω_z , с ростом скорости разгона v_x фазовые траектории попадают в область $V_1O_1O_2V_2$, в которой угловая скорость экипажа будет возрастать.

Исследуем случай (18) для наиболее опасной ситуации, когда экипаж попадает на скользкую дорогу, т. е.

$$\varkappa \ll \frac{v_0^2}{4 + v_0^2 h}. \quad (20)$$

Малость величины \varkappa обеспечивает выполнение неравенств (15) и (18). Из (19) с погрешностью $O(\varkappa^2)$ следует

$$V_1 = \left(\frac{\varkappa}{v_0}, 0 \right), \quad V_2 = \left(v_0 - \frac{\varkappa}{v_0}, 0 \right).$$

При этом основание V_1V_2 «опасной» области $V_1O_1O_2V_2$ практически совпадает со всем диапазоном $(0, v_0)$ изменения продольной скорости v_x . Координатами равновесных точек системы (16) с погрешностями $O(\varkappa\sqrt{\varkappa})$ и $O(\varkappa^2)$ будут $O_1 = (0, \sqrt{\varkappa})$ и $O_2 = (v_0, \varkappa/v_0)$. Проведя линеаризацию (16) вблизи точки O_1 легко показать, что эта точка является устойчивым фокусом. Из рис. 4 видно, что индекс Пуанкаре точки O_2 равен -1 , т. е. тип этой особой точки — седло. Фазовый портрет системы (16), отвечающий условию (20), приведён на рис. 4.

Рассмотрим теперь задачу о движении при потере сцепления переднего колеса. Начнём с торможения, приводящего к блокировке. В отличие от предыдущего, теперь в (1)–(5) следует принять $\Omega_1 = 0$, а в качестве быстрых переменных системы вида (2), (7) взять U_{2x}, U_{2y} . Примем те же, что и ранее, допущения и проделаем однотипные выкладки. Условием безотрывности колёс здесь будет $1 - b - \varkappa h > 0$, невозмущённым движением системы —

$$v_x^0(t) = v_x(0) - \varkappa n_1^0 t, \quad \omega_z^0(t) \equiv 0, \quad n_1^0 = \frac{b}{1 - \varkappa h}.$$

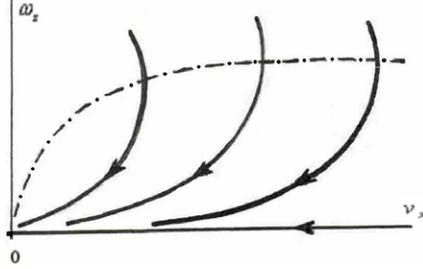


Рис. 5

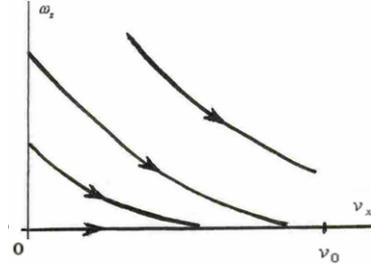


Рис. 6

Система, аналогичная (13), имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\kappa b \frac{v_x}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2} - \kappa h v_x} + \omega_z^2 b, \\ (b^2 + \varrho_z^2) \frac{d\omega_z}{dt} &= -\kappa b \frac{\omega_z}{\sqrt{v_x^2 + \omega_z^2} - \kappa h v_x} - \omega_z v_x b. \end{aligned} \quad (21)$$

Фазовый портрет системы (21) приведён на рис. 5. Как и ранее, траектории симметричны относительно оси v_x . Штрихпунктирными линиями обозначены изоклины

$$v_x^2 = \frac{\omega_z^6}{\kappa^2(1 + h\omega_z^2)^2 - \omega_z^4},$$

соответствующие $dv_x/dt = 0$. Из второго уравнения системы (21) видно, что $d\omega_z/dt < 0$ при всех $v_x > 0$, $\omega_z > 0$, т. е. отклонения ω_z от невозмущённого движения монотонно убывают и заноса экипажа не возникает.

Случаю переднеприводного разгона с пробуксовкой отвечает невозмущённое движение

$$v_x^0(t) = v_x(0) + \kappa n_1^0 t, \quad \omega_z^0(t) \equiv 0, \quad n_1^0 = \frac{b}{1 + \kappa h}. \quad (22)$$

Условие безотрывности колёс выполняется для всех значений параметров. Аналогом системы (16) для этого режима будет

$$\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= -\kappa b \frac{v_x - v_0}{\sqrt{(v_x - v_0)^2 + \omega_z^2} - \kappa h(v_x - v_0)} + \omega_z^2 b, \\ (b^2 + \varrho_z^2) \frac{d\omega_z}{dt} &= -\kappa b \frac{\omega_z}{\sqrt{(v_x - v_0)^2 + \omega_z^2} - \kappa h(v_x - v_0)} - \omega_z v_x b. \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь, как и в (15), $v_0 = \Omega_1^0 R / V_*$ — безразмерное значение установившейся скорости ведущего колеса, до которой разгоняется экипаж в режиме пробуксовки.

Фазовый портрет системы (23) приведён на рис. 6. Траектории симметричны относительно оси v_x . В рассматриваемом случае при $v_x > 0$, $\omega_z > 0$ будет $dv_x/dt > 0$, $d\omega_z/dt < 0$, т. е. отклонения v_x , ω_z от невозмущённого движения монотонно убывают.

Из сравнения рисунка 3 с рисунком 5 и рисунка 4 с рисунком 6 следует, что переднеприводный вариант торможения и разгона с точки зрения безопасности движения предпочтительнее заднеприводного. Различия в поведении автомобиля объясняются тем, что для переднеприводного варианта момент $-\omega_z v_x b$ инерционных сил относительно неспускающей точки контакта заднего колеса имеет в (21), (23) знак положительного трения, а для заднеприводного варианта в (13), (16) момент $\omega_z v_x a$ инерционных сил относительно неспускающей точки контакта переднего колеса — знак отрицательного трения.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант 04-01-00759) и программы «Университеты России» (грант УР.04.03.064/04-1).

Литература

- [1] Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. — М.: Физматлит, 1959.
- [2] Васильева А. Б. Асимптотические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений с малыми параметрами при старших производных // ЖВМ и МФ. — 1963. — Т. 3, № 4. — С. 611—642.
- [3] Копылов И. А., Новожилов И. В. Модель переменной структуры для поперечного движения железнодорожного вагона // Изв. РАН. МТТ. — 1996. — № 6. — С. 27—36.
- [4] Лобас Л. Г., Вербицкий В. Г. Качественные и аналитические методы в динамике колёсных машин. — Киев: Наукова думка, 1990.
- [5] Новожилов И. В. Фракционный анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1995.
- [6] Новожилов И. В. Качение колеса // Изв. РАН. МТТ. — 1998. — № 4. — С. 50—55.
- [7] Новожилов И. В., Павлов И. С. Приближённая математическая модель колёсного экипажа // Изв. РАН. МТТ. — 1997. — № 2. — С. 196—204.
- [8] Тихонов А. Н. Системы дифференциальных уравнений, содержащие малые параметры при производных // Мат. сб. — 1952. — Т. 31, № 3. — С. 575—586.
- [9] Ресејка Н. В. Lateral dynamics of road vehicles // Vehicle System Dynamics. — 1987. — Vol. 16. — P. 75—120.